Capítulo 8
Desvanecimientos geométricos II

***Contenido*:**

1. La Paradoja del Tablero

Relacionadas muy de cerca con las paradojas de las figuras discutidas en el capítulo anterior, existe otra clase de paradojas en las que el Principio de Distribución Oculta causa misteriosas pérdidas o ganancias de terreno. La Figura 69 muestra uno de los ejemplos más simples y antiguos.

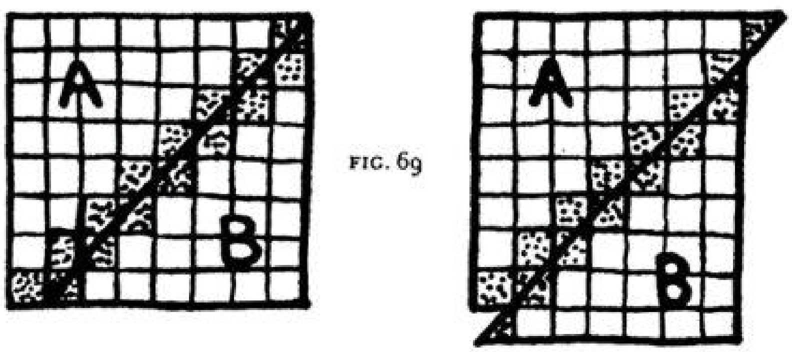

FIG. 69

Se corta el tablero de la izquierda a lo largo de la línea diagonal. Se desliza hacia abajo la parte B como se muestra a la derecha. Si se recorta el triángulo proyectado en el ángulo superior derecho, y se lo acomoda en el espacio triangular de la izquierda, abajo, se formará un rectángulo de 7 unidades por 9. El cuadrado original ocupaba una superficie de 64 unidades cuadradas.

Ahora tenemos una superficie de 63. ¿Qué pasó con el cuadro que falta?

La respuesta está en el hecho de que la línea diagonal pasa ligeramente por debajo de la esquina inferior izquierda del cuadro que está en la esquina superior del tablero. Esto hace que el triángulo recortado tenga una altitud de $1^1/_7$ unidades en lugar de 1, y el rectángulo entero adquiere una altura de $9^1/_7$ unidades. La adición de $^1/_7$ de unidad a la altura no es perceptible, pero cuando se la considera en la cuenta, el rectángulo tendrá la superficie esperada de 64 unidades cuadradas.

La paradoja es aún más desconcertante para los no iniciados si no aparecen en la figura los cuadros pequeños. Cuando las unidades cuadradas se ven, una inspección de cerca revela que el ajuste a lo largo del corte diagonal no es perfecto.

Si examinamos los cuadros pequeños que corta la línea diagonal quedará clara la relación entre esta paradoja y la paradoja de las líneas verticales del capítulo anterior. Si recorremos la línea hacia arriba, encontramos que los cuadros cortados (sombreados en la ilustración) se vuelven progresivamente más pequeños por encima de la línea y progresivamente más grandes por debajo. En el tablero hay quince de estos cuadros sombreados, pero sólo catorce después de formado el rectángulo. La aparente desaparición de un cuadro sombreado no es más que otra forma de la paradoja de DeLand antes discutida. Cuando recortamos el triangulito y lo volvemos a colocar, lo que hacemos en realidad es cortar la parte A del tablero en dos piezas y desplazar sus posiciones a lo largo de la línea diagonal. Toda la trampa está confinada a los cuadros pequeños a lo largo del corte diagonal. Los otros cuadros no juegan parte alguna en la paradoja. Están sólo de relleno. Pero al incorporarlos, cambiamos el carácter de la paradoja. En lugar de la desaparición de un cuadrito en una serie de cuadros dibujados en un papel (o cualquier otra figura más complicada, como un naipe, una cara, etc., que podemos dibujar dentro de cada cuadrito), acá tenemos un aparente cambio de área en una figura geométrica grande.

2. La Paradoja de Hooper

Una paradoja similar de superficie, en la que resulta aún más obvio el parecido con la de DeLand, se encuentra en RATIONAL RECREATIONS de William Hooper, edición de 1794, Vol. 4, p. 286.

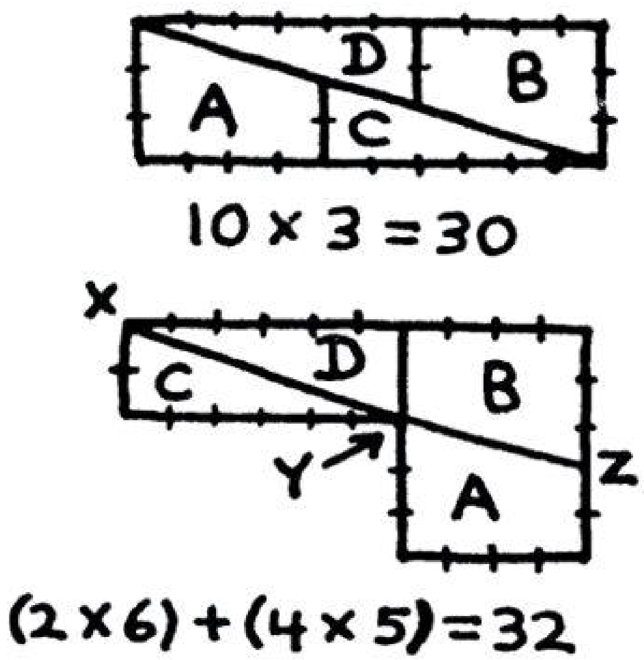

FIG. 70

Al intercambiar las posiciones de A y C como se muestra en la Figura 70, un rectángulo de 30 unidades cuadradas se transforma en dos rectángulos más pequeños con una superficie combinada de 32 unidades cuadradas: un incremento de dos unidades. Igual que en el caso anterior, sólo están involucrados en el cambio los cuadros situados a lo largo de la diagonal. El resto es relleno.

Hay dos formas básicamente diferentes en que se pueden cortar las piezas en la paradoja de Hooper. Si construimos primero el rectángulo de la parte superior y trazamos ajustadamente la diagonal de esquina a esquina, entonces los dos rectángulos menores ubicados a la derecha de la figura, resultarán cada uno 1/5 de unidad más cortos que su altura aparente. Por otro lado, si construimos primero la segunda figura, dibujando con precisión ambos rectángulos y trazando una línea recta de X a Y y de Y a Z, entonces la línea XZ no será perfectamente recta. Se formará un ángulo con Y como vértice, pero un ángulo tan obtuso que parecerá una línea recta. Como resultado de esto, cuando se haya formado la primera figura habrá una ligera superposición de las piezas a lo largo de la diagonal. La paradoja anterior del tablero, como la mayoría de las paradojas que se discutirán en este capítulo, pueden construirse igualmente en estas dos formas alternativas. Una de las formas produce una ligera pérdida o ganancia en la altura (o ancho) total de las figuras. En la otra forma, la pérdida o la ganancia se producen a lo largo de la diagonal: ya sea por una superposición, como en este caso, o por un espacio abierto como veremos de inmediato.

La paradoja de Hooper puede adoptar un número infinito de formas si se varían las proporciones de las figuras y el grado de inclinación de la diagonal. Se la puede construir de tal manera que la pérdida o la ganancia sea de 1 unidad cuadrada, 2, 3, 4, 5, y así hasta el infinito, Cuanto más alto se vaya, por supuesto, resulta más visible la forma en que se distribuyen las unidades cuadradas faltantes, a menos que los rectángulos sean extremadamente grandes con respecto al número de unidades que se haga desaparecer.

3 Variante Cuadrada

Una variación de esta paradoja utiliza dos rectángulos de tal proporción que se complementan lado a lado para formar un perfecto tablero de 8 por 8. Cuando las piezas se reacomodan para formar el rectángulo mayor se produce una ganancia aparente de una unidad cuadrada (Ver Fig. 71).

Si el cuadrado se construye con precisión, el rectángulo grande no tiene una diagonal exacta. A lo largo de la diagonal quedará un espacio romboidal, pero tan alargado que resulta imperceptible. Por otro lado, si el rectángulo mayor se dibuja con una diagonal exacta, entonces el rectángulo superior del cuadrado quedará ligeramente más alto de lo debido, y el rectángulo inferior ligeramente más ancho. El ajuste inexacto que causa el segundo sistema de corte es más perceptible que la inexactitud a lo largo de la diagonal del primer sistema, de ahí que sea preferible el primero. Igual que en los ejemplos anteriores, podemos dibujar círculos, caras o cualquier otra figura dentro de los cuadrados cortados por las líneas diagonales, y al desplazar las posiciones de las piezas estas figuras perderán o ganarán uno de sus miembros.

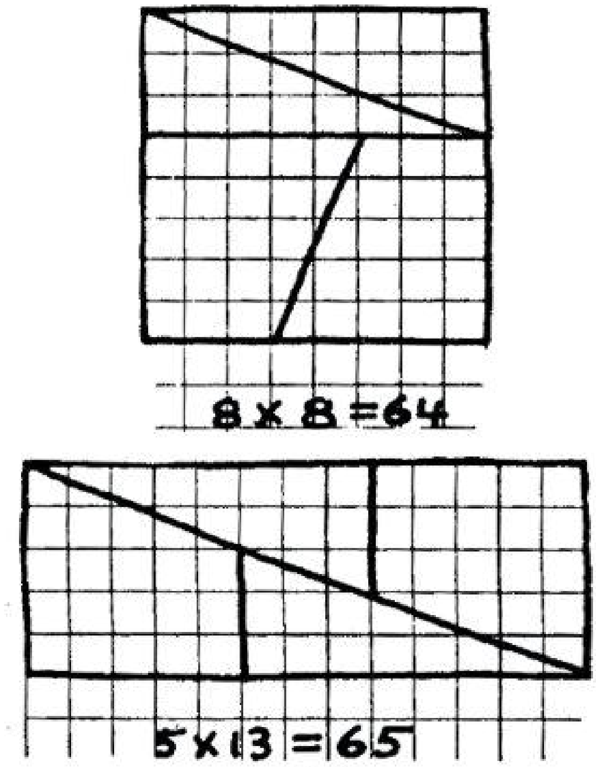

FIG. 71

En MATHEMATICAL RECREATIONS AND ESSAYS, W. W. Rouse Ball da 1868 como la fecha más temprana en que pudo encontrar esta paradoja publicada. Sam Loyd, padre, cuando discute la paradoja en la p. 288 de su CYCLOPEDIA OF 5000 PUZZLES, dice que él la presentó en 1858 en el Congreso Americano de Ajedrez; y en su columna del *Daily Eagle* de Brooklyn, una vez se refirió a ella como «mi viejo problema del tablero cortado de donde le brotó un pariente cercano al chino desaparecido». Cuando uno comprende la paradoja, dice, «entiende algo sobre los métodos chinos para desaparecer de la faz de la tierra». Es difícil inferir de estas palabras si Loyd declara haber inventado la paradoja, o fue sólo el primero en presentarla al público.

El hijo de Sam Loyd (que adoptó el nombre de su padre y continuó su columna de acertijos) fue el primero en descubrir que las cuatro piezas pueden acomodarse de tal manera que la superficie queda reducida a 63 cuadros. La Figura 72 muestra cómo se hace.

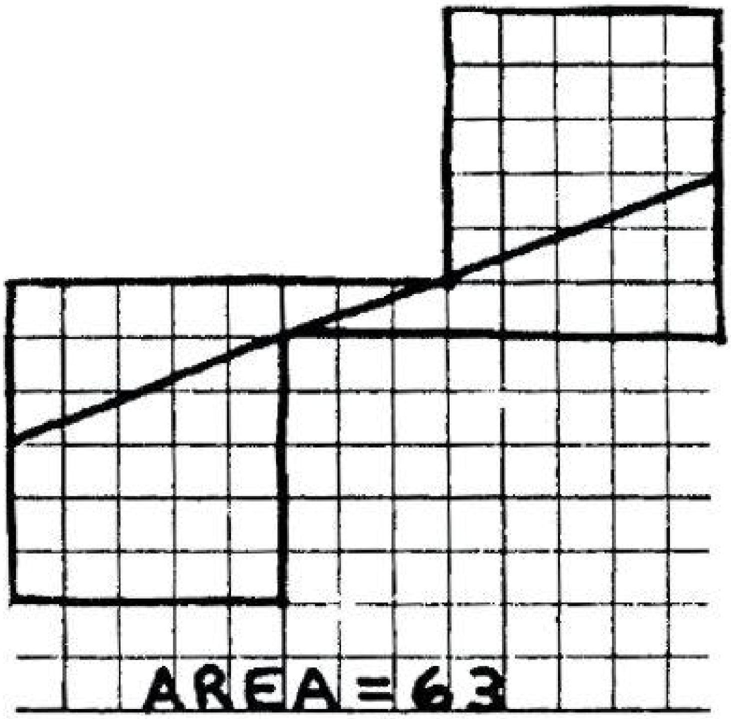

FIG. 72

4. La serie de Fibonacci

El largo de los diversos segmentos lineales que aparecen en las cuatro piezas caen en una serie de Fibonacci, es decir, una serie de números de los cuales cada uno es la suma de los dos números precedentes. La serie empleada aquí es la siguiente.

1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - 34 - etc.

Al reacomodar las piezas para formar el rectángulo se ilustra una de las propiedades de esta serie de Fibonacci, a saber, que si un número cualquiera de la serie es elevado al cuadrado, el resultado es igual al producto de los dos números que tiene a uno u otro lado, más o menos 1. En este caso el cuadrado tiene un lado de 8 y una superficie de 64. En la serie de Fibonacci el 8 está entre el 5 y el 13. Como 5 y

13 se convierten automáticamente en los lados del rectángulo, el rectángulo debe tener una superficie de 65, una unidad ganada.

Debido a esta propiedad de la serie, podemos construir el cuadrado con un lado representado por cualquier número de la serie mayor que 1, y luego cortarlo conforme a los dos números precedentes de la serie. Si elegimos por ejemplo un cuadrado con un lado de 13, dividimos tres de sus lados en segmentos de 5 y 8, y trazamos las líneas de corte como muestra la Figura 73. Este cuadrado tiene una superficie de 169. El rectángulo que se forme con las mismas piezas tendrá lados de 21 y 8, o una superficie de 168. Debido a una superposición a lo largo de la diagonal del rectángulo, se pierde una unidad cuadrada en lugar de ganarse.

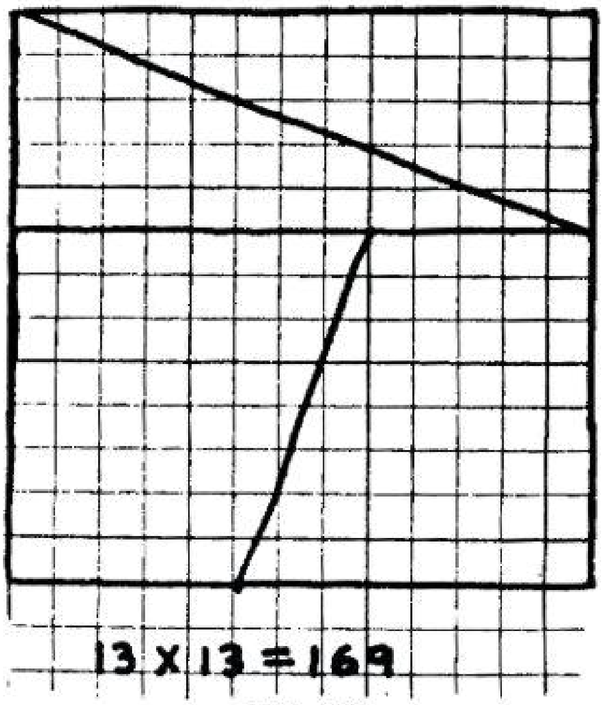

FIG. 73

También se pierde una unidad si elegimos un cuadrado con un lado de 5. Esto nos lleva a una regla muy curiosa. En la serie de Fibonacci ciertos números alternados, si se usan para el lado del cuadrado, producen un *espacio* a lo largo de la diagonal del rectángulo y la *ganancia* aparente de una unidad cuadrada. Los otros números alternados, si se usan para el lado del cuadrado, provocan una *superposición* a lo largo del rectángulo, y la *pérdida* de una unidad cuadrada.

Cuanto más arriba se va en la serie, el espacio o la superposición resultan menos perceptibles. Y en forma equivalente, resultan más perceptibles cuanto más abajo se va. Podemos incluso construir la paradoja en un cuadrado que tenga por lado dos unidades solamente, pero en este caso el rectángulo de 3 por 1 provoca una superposición tan obvia que se pierde por completo el efecto de la paradoja.

El primer intento de generalizar la paradoja cuadrado-rectángulo por su relación con esta serie de Fibonacci, se debe, aparentemente, a V. Schlegel en *Zeischrijt fur Mathematik und Physik*, vol 24 (1879), p. 123. E. B. Escott publicó un análisis similar en *Open Court*, Vol. 21 (1907), p. 502, y describió una manera algo diferente de cortar el cuadrado. Lewis Carroll se interesó en la paradoja y dejó algunas notas incompletas en las que proponía fórmulas para encontrar otras dimensiones para las piezas involucradas. (Ver el artículo de Warren Weaver, «Lewis Carroll y una Paradoja Geométrica», en *American Mathematical Monthly*, Vol. 45, 1938, p. 234).

Podemos obtener un número infinito de variantes si basamos la paradoja sobre otra serie de Fibonacci. Por ejemplo, un cuadrado basado sobre la serie 2, 4, 6,10,16, 26, etc., dará ganancias o pérdidas de 4 unidades cuadradas. Podemos determinar fácilmente la ganancia o la pérdida si hallamos la diferencia entre el cuadrado de un número cualquiera de la serie y el producto de sus dos números adyacentes. La serie 3, 4, 7, 11, 18, etc., produce ganancias y pérdidas de 5 unidades cuadradas. T. de Moulidars, en su GRANDE ENCYCLOPEDIE DES JEUX, París, 1888, p. 459, propone un cuadrado basado sobre la serie 1, 4, 5, 9, 14, *etc.* El cuadrado tiene 9 de lado, y cuando se forma el rectángulo pierde 11 unidades cuadradas. La serie 2, 5, 7, 12, 19, etc., también produce pérdidas y ganancias de 11. En ambos casos, sin embargo, la superposición (o espacio) a lo largo de la diagonal del rectángulo es bastante como para ser notada.

Si llamamos A, B, y C a tres números consecutivos cualesquiera de una serie de Fibonacci, y consideramos X la pérdida o ganancia de superficie, obtenemos las dos fórmulas siguientes:

$$A + B = C$$

$$B^2 = AC \pm X$$

Podemos sustituir la X por cualquier pérdida o ganancia deseada y la B por el largo que se quiera dar como lado del cuadrado. Entonces es posible formular ecuaciones de segundo grado que nos darán los otros dos números de la serie de Fibonacci, aunque por supuesto pueden no ser números racionales. Es imposible, por ejemplo, producir pérdidas o ganancias ya sea de dos o tres unidades cuadradas si se divide un cuadrado en partes de longitudes racionales. Para obtener estos resultados es preciso realizar, por supuesto, divisiones irracionales. De ahí que la serie de Fibonacci $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$ dará una pérdida o ganancia de dos, y la serie $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ dará una pérdida o ganancia de tres.

5. La versión de Langman

Hay muchas otras formas en que se pueden cortar rectángulos en unas pocas piezas, y reacomodar las piezas en un rectángulo de superficie mayor o menor. La Figura 74 representa una paradoja desarrollada por el Dr. Hany Langman de la ciudad de Nueva York.

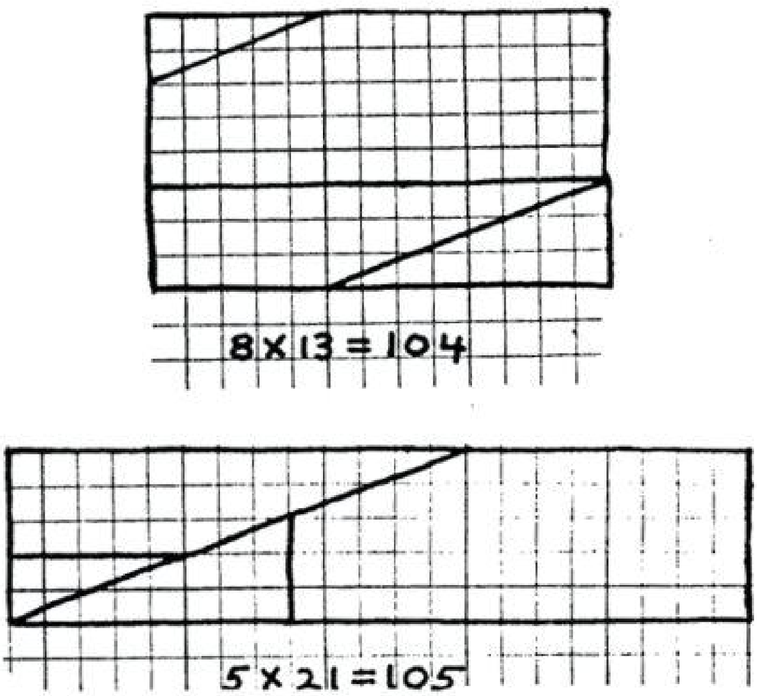

FIG. 74

El rectángulo de Langman también está basado sobre una serie de Fibonacci. Como el cuadrado que se acaba de analizar, la elección de términos alternos de la serie para el ancho del primer rectángulo (13 en este caso) producirá el incremento de una unidad cuadrada en la superficie del segundo rectángulo. Si uno de los restantes términos alternos de la serie de Fibonacci se usa para el ancho del primer rectángulo, se perderá una unidad cuadrada en el segundo rectángulo. Las pérdidas o ganancias se explican por un ligero espacio o superposición a lo largo del corte diagonal del segundo triángulo. Otra versión del rectángulo de Langman, que se muestra en la Figura 75, produce el incremento de dos cuadros cuando se forma el segundo rectángulo.

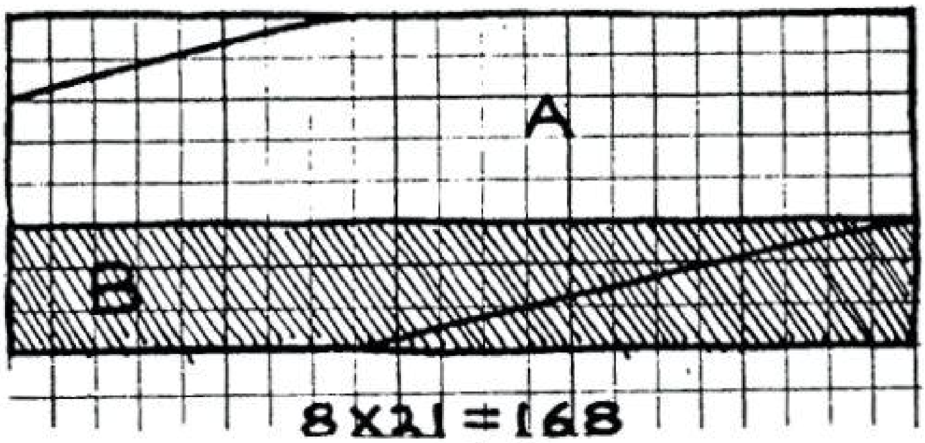

FIG. 75

Si tomamos la parte sombreada de este rectángulo, y la colocamos por encima de la parte no sombreada, los dos cortes diagonales formarán una diagonal larga. Si se desplazan las posiciones de las partes A y B, se formará el segundo rectángulo, de superficie mayor. Vemos en consecuencia que la paradoja de Langman es simplemente otra forma de la paradoja de Hooper discutida más arriba.

6. La Paradoja de Curry

Ahora dirijamos la atención a una forma simple de la paradoja de Hooper. En la Figura 76, el intercambio de las posiciones de los triángulos B y C causará la pérdida aparente de una unidad cuadrada en la superficie total de la figura.

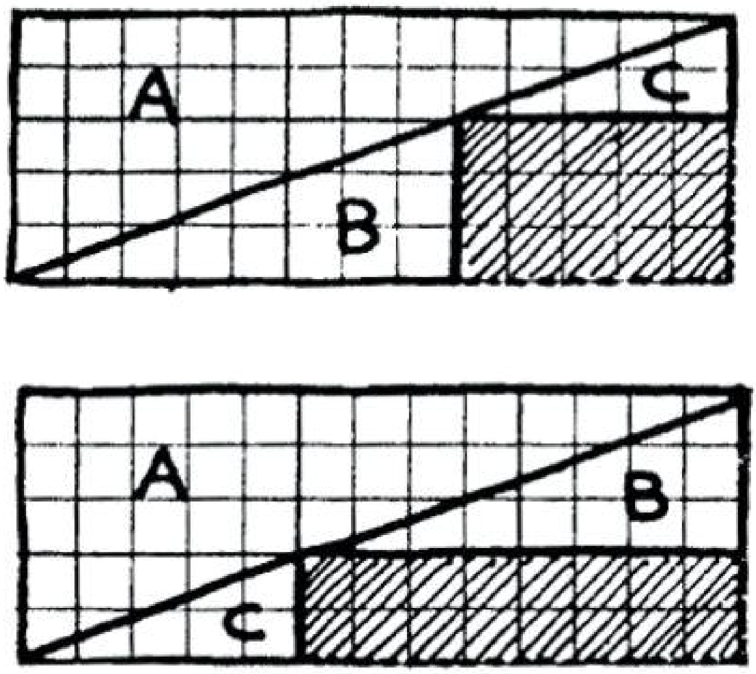

FIG. 76

Usted advertirá que también se produce un cambio en las superficies sombreadas. Tenemos 15 cuadros sombreados en una, y 16 en la otra. Si llenamos estas superficies sombreadas con dos piezas de forma especial, llegamos a una nueva y asombrosa manera de presentar la paradoja.

Tenemos un rectángulo que se puede cortar en cinco piezas, que luego pueden reacomodarse para formar un nuevo rectángulo de idéntico tamaño ¡pero con el hueco de una unidad cuadrada dentro de la figura! (Fig. 77).

El inventor de esta encantadora paradoja es Paul Curry, un mago aficionado de la ciudad de Nueva York. En 1953 concibió la brillante idea de cortar y reacomodar las partes de una figura para formar una figura idéntica pero con un agujero dentro de su perímetro. En la presente versión de la paradoja de Curry, si el punto X se localiza exactamente a 5 unidades del lado y a 3 unidades de la base, la línea diagonal no quedará recta del todo, aunque la desviación será tan leve que resultará casi imperceptible. Al desplazar los triángulos B y C, se producirá una ligera superposición a lo largo de la diagonal en la segunda figura.

Por otro lado, si en la primera figura se traza la diagonal con exactitud de esquina a esquina, entonces la línea XW será apenas más larga que 3 unidades. En consecuencia, el segundo rectángulo será ligeramente más largo de lo que parece. En el primer caso, podemos considerar que la unidad faltante está extendida de esquina a esquina, formando la superposición a lo largo de la diagonal.

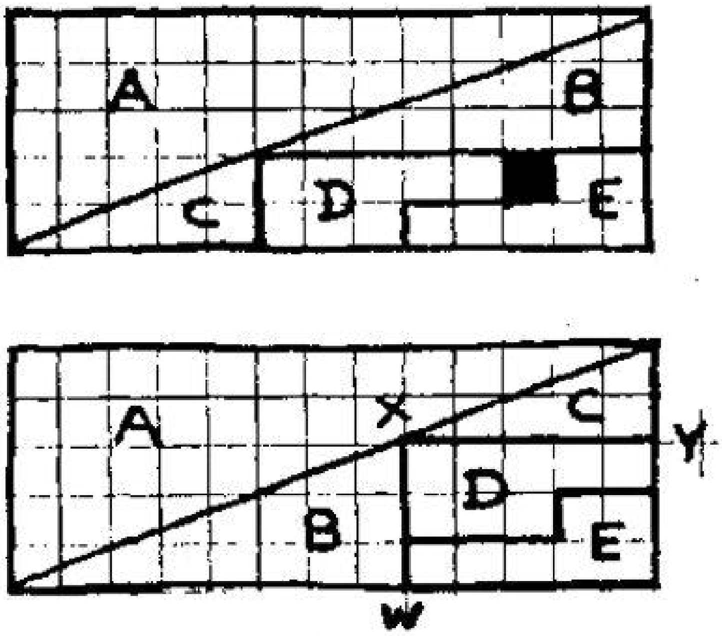

FIG. 77

En el segundo caso, el cuadro que falta queda distribuido por todo el ancho del rectángulo. Como vimos más arriba, todas las paradojas de este tipo están sujetas a estas dos formas alternativas de construcción. En ambas formas las discrepancias de la figura son tan mínimas que resultan virtualmente invisibles.

Las formas más elegantes de la paradoja de Curry son cuadrados que, una vez reacomodadas las partes, siguen siendo cuadrados pero tienen un agujero. Curry desarrolló numerosas variantes, pero no pudo lograr que las partes fueran menos de cinco ni producir un agujero que no tocara el borde. Los cuadrados de Curry tienen infinitas variaciones, con agujeros de la cantidad de unidades cuadradas que se quiera. En la Figura 78 se reproducen algunas de las formas más interesantes.

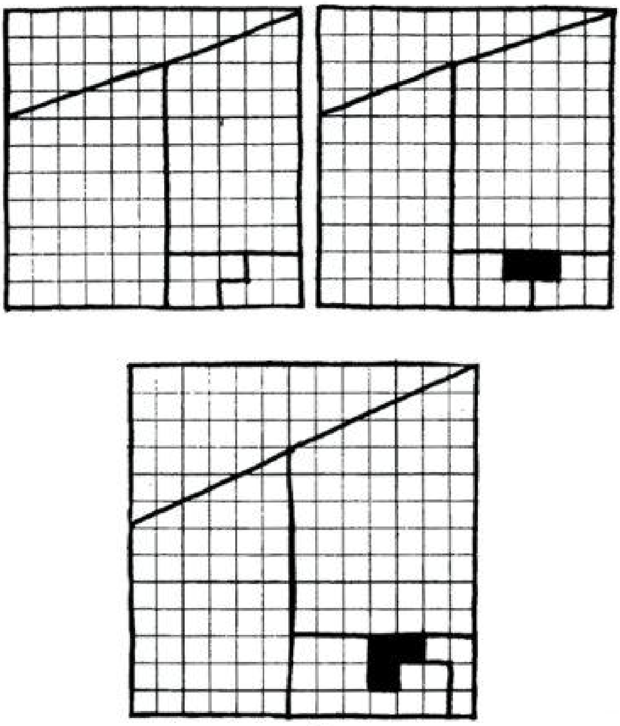

FIG. 78

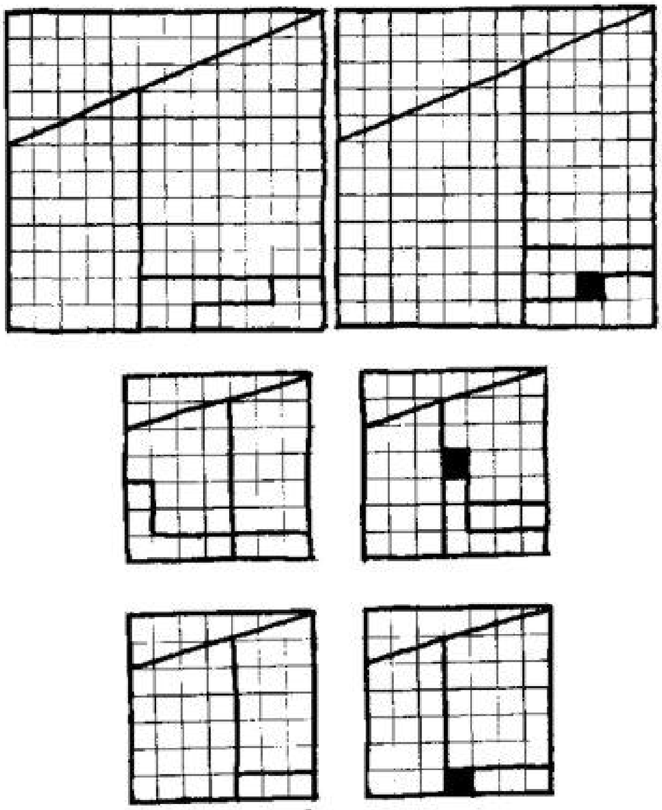

FIG. 78 CONTINUED

El Dr. Alan Bamet, un oftalmólogo de la ciudad de Nueva York, me acercó una fórmula simple que relaciona el tamaño del agujero a las proporciones relativas de las tres piezas mayores. Los tres largos involucrados se identifican como A, B y C en la Figura 79; X es un punto de la diagonal.

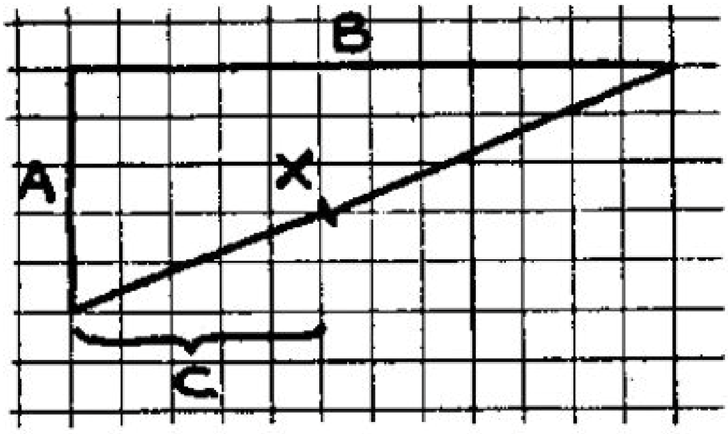

FIG. 79

La diferencia entre el producto de A y C y el múltiplo de B más cercano dará el número de unidades cuadradas que tendrá el agujero. En el presente ejemplo, entonces, el producto de Ay C es 25. El múltiplo de 8 más próximo a 25 es 24; en consecuencia, el agujero tendrá una unidad cuadrada. Esta regla se mantiene tanto para el caso en que la diagonal se trace perfectamente como una línea recta y se tome C en forma aproximada, como para el caso en que se haga caer el punto X de esta figura justo en una intersección de la cuadrícula deformando un poco la diagonal. Si la diagonal es perfectamente recta, y *además* el punto X cae exactamente en una intersección de la cuadrícula la paradoja no se produce. En esos casos la fórmula del tamaño del agujero da cero, lo cual significa por supuesto que no habrá agujero alguno.

En mi opinión, los cuadrados de Curry mejor presentados son los que trazan la diagonal en forma exacta de modo que la pérdida o ganancia se produce por una ligera alteración en la altura del cuadrado. Si en la figura no se trazan líneas cuadriculadas, esta alteración no será perceptible.

Se pueden dibujar pequeñas figuras en cada uno de los puntos donde habría un cuadrito si la figura estuviera cuadriculada. Una de estas figuras por supuesto desaparecería. El agujero sugiere que se desvanece la figura que aparece en su lugar, aunque en realidad la desaparición, como hemos visto, se produce a lo largo de la línea diagonal.

Otra presentación divertida consiste en preparar las piezas en madera, plástico o linóleo, y cortarlas como para que el cuadrado quepa perfectamente en una caja. Tapone el agujero con una piecita cuadrada. Para mostrar la paradoja, vierta las piezas sobre una mesa y luego vuelva a colocarlas por el lado inverso. ¡Se han reacomodado de tal manera que después de ajustarse dentro de la caja no queda espacio para la piecita cuadrada! Para la mayoría de la gente esto resulta completamente desconcertante.

Royal V. Heath inventó un cuadrado hecho con piezas de metal pulido que caben en un pequeño estuche plástico. Entre el cuadrado y un lado del estuche hay espacio para una regla de plástico colocada sobre su borde. La regla tiene el mismo largo que un lado del cuadrado.

Primero se la saca y se la utiliza para comprobar que la caja es en verdad cuadrada. Entonces se quitan las piezas y se las vuelve a colocar en el estuche de manera que aparece el agujero. Como la regla ya no está en el estuche, éste resulta más largo por el grosor de la regla, y en consecuencia permite que las piezas de metal quepan tan ajustadamente como antes. En las piezas no aparecen marcas cuadriculadas.

Se me ocurre que sería posible biselar los bordes de las piezas de tal modo que se superpusieran ligeramente cuando están en una formación, pero no se superpusieran en la otra formación. De esta manera se podría mantener exactamente igual la dimensión exterior del cuadrado en ambas formaciones.

7. Los Triángulos de Curry

Mi propia contribución a este número creciente de paradojas es el descubrimiento de formas triangulares simples. Volviendo al primer ejemplo de la paradoja de Curry, Figura 77, usted observará que el triángulo grande A queda en una posición fija mientras las otras piezas se desplazan. Como este triángulo no juega un rol esencial en la paradoja, podemos descartarlo por completo, y dejar un triángulo recto cortado en cuatro piezas. Las cuatro piezas pueden reacomodarse (Fig. 80) como para formar un triángulo recto aparentemente idéntico con su agujero.

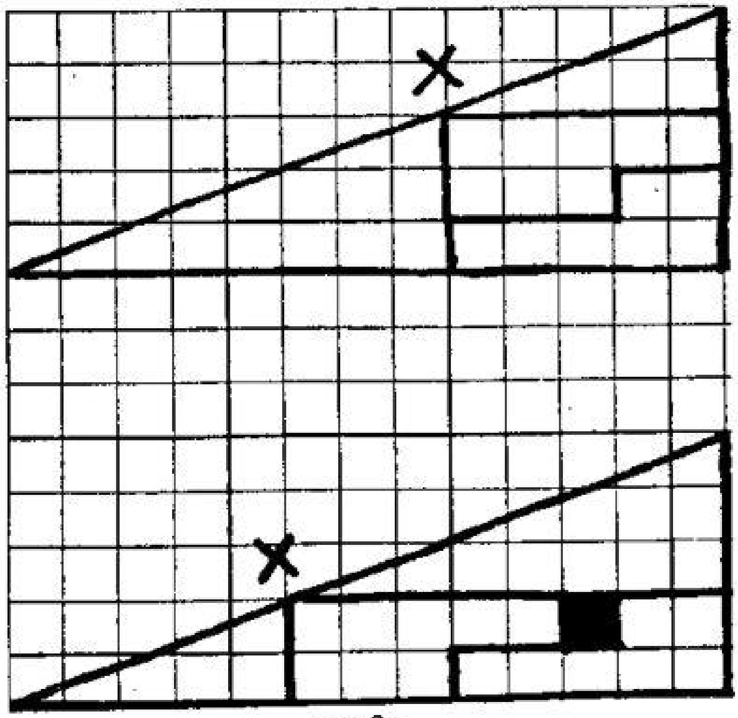

FIG. 80

Si se colocan dos de estos triángulos uno al lado del otro, se puede elaborar una variedad de interesantes formas isósceles similares a las que aparecen en la Figura 81.

Como las paradojas discutidas anteriormente, estos triángulos pueden construirse de dos maneras diferentes. Podemos trazarlos con los lados perfectamente rectos, en cuyo caso el punto X no caerá en una intersección precisa de las líneas cuadriculadas, o podemos ubicar el punto X en una intersección exacta, en cuyo caso los lados quedarán ligeramente cóncavos o convexos. Este último método parece el más engañoso. Esta paradoja resulta particularmente sorprendente si las piezas son cuadriculadas, porque esto destaca la exactitud con que se han construido las diversas piezas.

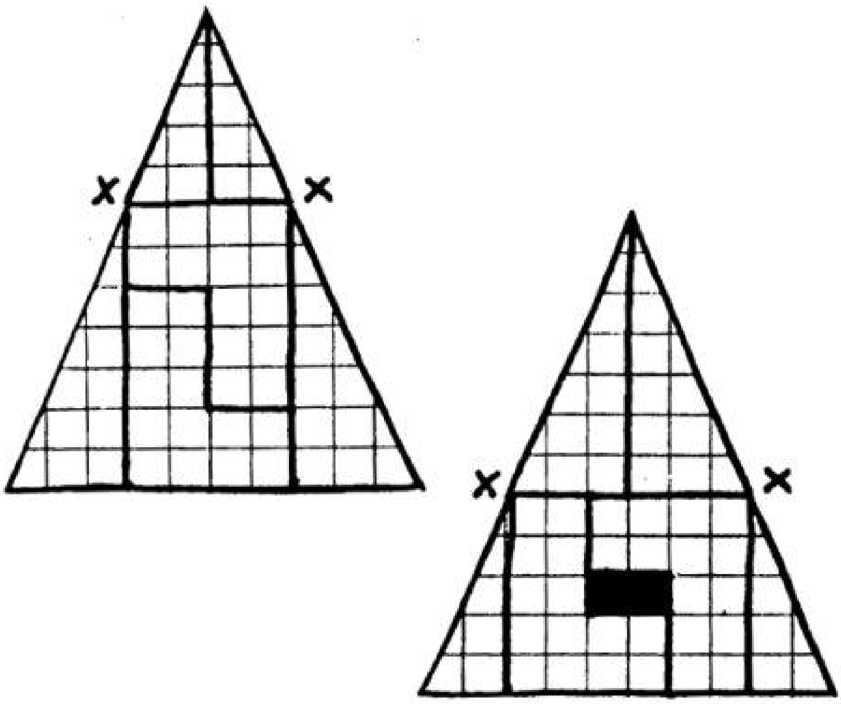

FIG. 81

Los triángulos isósceles pueden tener diversas formas para producir ganancias y pérdidas de cualquier número par de unidades cuadradas. En la figura 82 se proponen algunos ejemplos representativos.

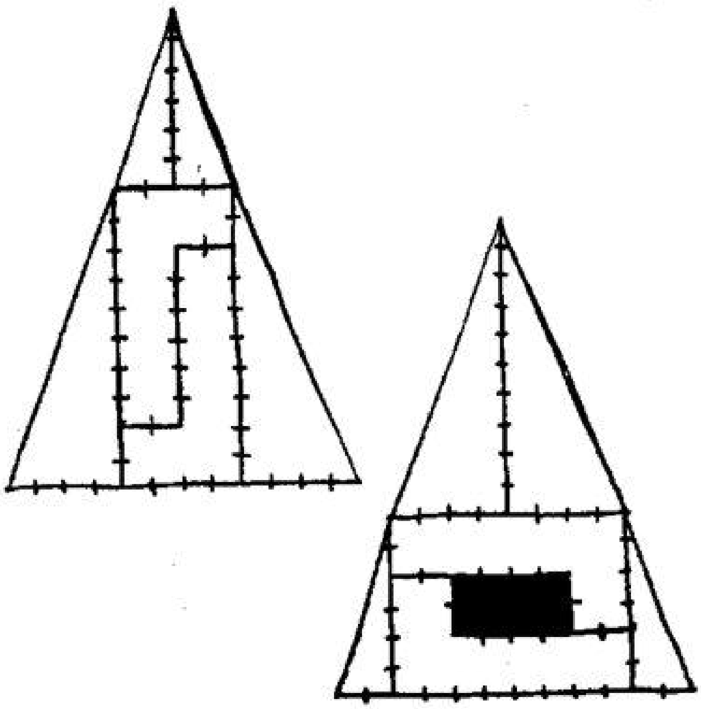

FIG. 82

Si dos triángulos isósceles de cualquiera de los tipos que hemos visto se colocan base contra base, pueden elaborarse numerosas variaciones en formas de diamante, pero no agregan nada esencialmente nuevo a la paradoja.

8. Cuadrados de Cuatro Piezas

Todas las paradojas de superficie cambiante discutidas hasta ahora están estrechamente relacionadas en su mecanismo y modo de construcción. Existen otras formas, sin embargo, de construcción muy diferente. Se puede, por ejemplo, cortar un cuadrado en cuatro piezas de forma y tamaño idénticos (Fig. 83). Cuando se reacomodan las cuatro piezas como muestra la Figura 84, forman un cuadrado aparentemente del mismo tamaño, pero con un agujero en el centro de cuatro unidades cuadradas.

De una manera similar se puede cortar un rectángulo de cualquier proporción. Curiosamente, el punto A donde se cruzan los dos cortes perpendiculares puede estar en cualquier punto del rectángulo. En todos los casos aparecerá un espacio al reacomodar las piezas; el tamaño del espacio varía según los ángulos de los cortes con respecto a los lados. La superficie del agujero, por supuesto, se distribuye en tomo del perímetro completo del rectángulo. Es una paradoja de atractiva simplicidad, pero adolece del problema de que sólo se requiere una ligera inspección para ver que los lados del segundo rectángulo necesariamente deben ser algo más largos que los lados del primero.

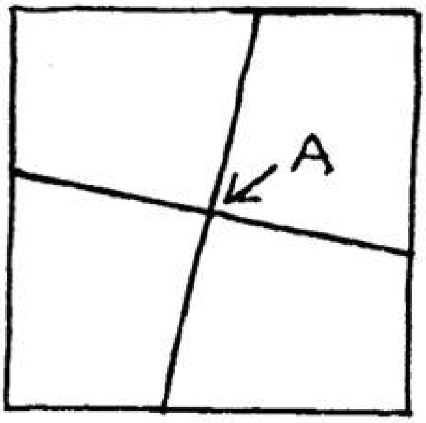

FIG. 83

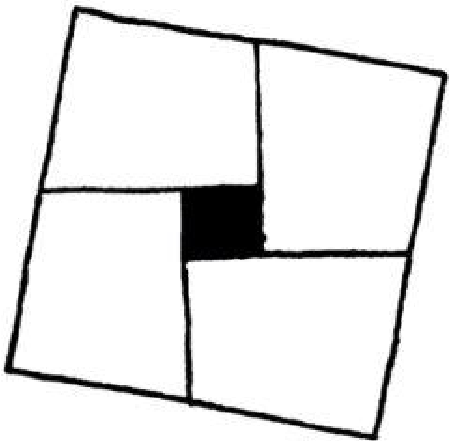

FIG. 84

En la Figura 85 se muestra un modo más desconcertante de cortar un cuadrado en cuatro partes para formar un agujero interior. Está basado sobre la paradoja del tablero que abre este capítulo.

Para formar el segundo cuadrado es preciso dar la vuelta a dos de las piezas. Observe que si eliminamos la parte A, tenemos un triángulo rectángulo de tres piezas en cuyo interior se puede producir un agujero.

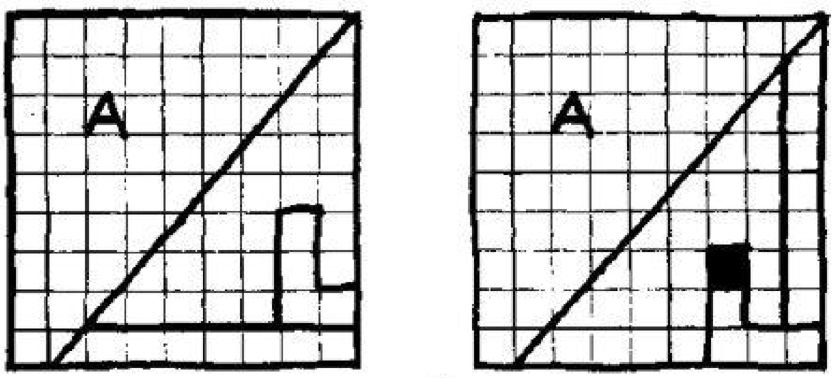

FIG. 85

9. Cuadrados de Tres Piezas

¿Existen métodos para cortar un cuadrado en tres partes que puedan acomodarse entre sí para producir un agujero interior? La respuesta es sí. Paul Curry inventó una solución ingeniosa: una adaptación de la paradoja de DeLand discutida en el capítulo anterior. En lugar de correr las figuras y hacer un corte horizontal recto, colocamos las unidades de la figura sobre una línea recta, y corremos el corte. Hecho esto, se produce un resultado sorprendente. No sólo se desvanece una figura, sino que además aparece un agujero en el lugar de la figura faltante.

10 Cuadrados de Dos Piezas

¿Se puede hacer con dos piezas? No creo que sea posible producir un agujero interior en un cuadrado por algún método que aumente imperceptiblemente el alto o el ancho del cuadrado. Paul Curry mostró, sin embargo, que puede hacerse si se aplica el principio ya explicado con respecto al guerrero chino que desaparece en la paradoja de Layd. En lugar de correr las figuras o moverlas en espiral, las figuras se colocan en un círculo regular y se hace el corte en espiral o escalonado como si fueran dientes de diferente tamaño de una rueda. Cuando se hace rotar la rueda, una figura se desvanece y aparece un agujero. Las partes quedan perfectamente ajustadas

sólo cuando el agujero es visible. En la otra posición habrá pequeños espacios en cada diente si es un corte escalonado, o un espacio todo alrededor si es un corte en espiral.

Si el rectángulo a cortar no es un cuadrado, entonces sí es posible dividirlo en dos piezas y formar un agujero interior mediante una sutil alteración de las dimensiones exteriores. La Figura 86 muestra un ejemplo que elaboré en 1954. Las dos piezas son idénticas en forma y tamaño. Una manera simple de demostrar la paradoja consiste en cortar las piezas en cartón, colocarlas sobre una hoja de papel más grande (con la forma de un rectángulo sin el agujero), y luego trazar una línea exterior en tomo de su perímetro. Cuando se acomodan las piezas entre sí de la otra manera, puede verse que aún coinciden con la línea exterior, aunque apareció un agujero en el centro del rectángulo. Por supuesto podría colocarse una tercera pieza, como una tira, a lo largo de un lado del rectángulo para convertirlo en cuadrado, lo que proporcionaría otro método para cortar un cuadrado en tres piezas que forme un agujero interior.

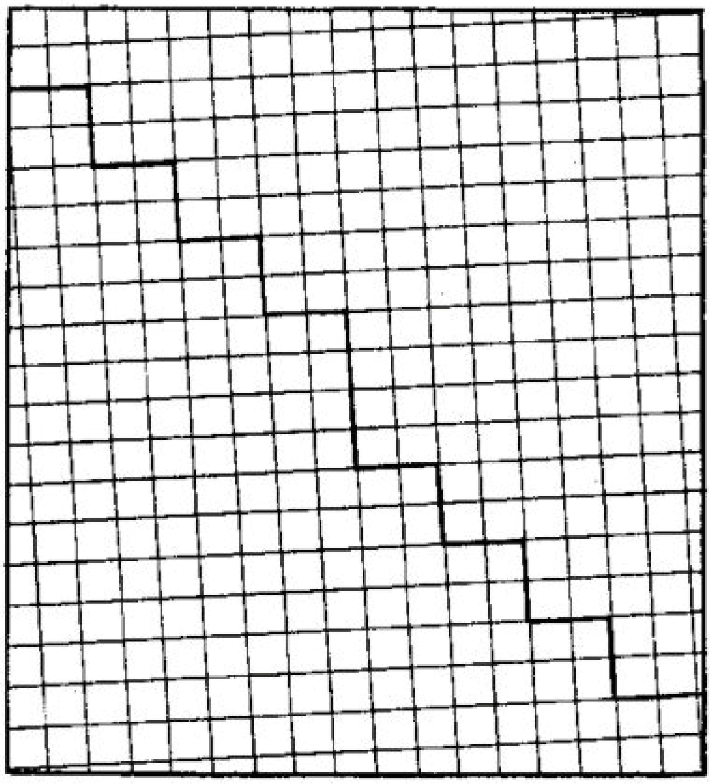

FIG. 86

11. Formas Curvas y Tridimensionales

A partir de estos ejemplos es evidente que el campo de las paradojas de superficie cambiante apenas comienza a ser explorado. ¿Existen formas curvas, tales como círculos o elipses, que puedan cortarse y reacomodarse para producir espacios interiores sin distorsión visible de la figura? ¿O formas tridimensionales que sólo existan en tres dimensiones, es decir, que no sean meras extensiones de formas bidimensionales? Es obvio que a cualquiera de las figuras analizadas en este capítulo puede agregarse una dimensión con sólo recortarlas de planchas gruesas como para que el agujero ocupe el largo de la tercera dimensión. ¿Pero existen formas simples de cortar un cubo, digamos, o una pirámide, de tal manera que al reacomodar las partes se forme en su interior un espacio considerable?

Sin limitaciones con respecto al número de piezas, estas formas sólidas pueden construirse con facilidad. El principio de Curry es claramente aplicable a un cubo en el que aparece un espacio interior, pero es más difícil determinar cuál es el menor número posible de partes. Un cubo como éste puede ciertamente construirse con seis piezas; este número de piezas puede reducirse con otros planos de corte. Una encantadora presentación de un cubo como éste sería sacarlo de una caja que llenara por completo, desarmarlo, encontrar una bolita en su interior, y luego armarlo otra vez para formar un cubo sólido que se ajuste perfectamente de vuelta dentro de la caja. Debe haber muchas formas, tanto planas como sólidas, que tengan elegancia y simplicidad, que futuros exploradores de este curioso ámbito tendrán el placer de descubrir.